

УДК 314.018

DOI <https://doi.org/10.31212/tokovi.2026.1.cos.403-444>

Оригинални научни рад/Original scientific paper

Примљен/Received: 18. 12. 2025.

Прихваћен/Accepted: 14. 4. 2026.

Марко БОСИЋ

Институт за нуклеарне науке „Винча”

mcosic@vin.bg.ac.rs

ORCID: 0000-0002-4338-0555

Оливера ДРАГИШИЋ

Институт за новију историју Србије

nowrunlolarun@gmail.com

ORCID: 0000-0002-2407-2389

Математички модел промене броја становника између пописа

АПСТРАКТ: Тема овог рада је интердисциплинарни покушај изградње научног, математичког модела, којим се може пратити динамика популације између два пописа становништва. Формирање тог модела проистекло је из тежње ка оптимизовању историографске методологије и испитивања могућности примене математичких модела у друштвеним наукама. Математички модел који омогућује праћење промене броја становника између два пописа изграђен је на подацима из *Статистичкој годишњака* Завода за статистику током хладноратовског периода, на примеру југословенског становништва. У првом делу рада образлажу се разлози за изградњу таквог научног модела, док се у другом делу рада може пратити процес његовог формирања и добијени резултати. Добијени модел историографији потенцијално омогућује пројекције бројева становништва за раздобља и просторе за које статистички подаци не постоје, док, са друге стране, математици и физици доноси могућност развоја модела на подацима на којима их до сада те науке нису изграђивале, нити примењивале.

Кључне речи: методологија, модел, историографија, београдска морфолошка школа, демографски оживљаци

Једна од примедби са којом се друштвене науке – па у оквиру њих и историографија – суочавају од када постоје, односи се на степен субјективности у њиховом сазнајном процесу, односно у процесу доношења закључака. Без обзира на чињеницу што је опаска да је историографија заснована више на субјективном него на објективном сазнању само делимично тачна,¹ такву констатацију има смисла уважити и перманентно преиспитивати. Ако у хуманистици апсолутна непристрасност и није достижна, можда је степен објективности (истине) у њеним научним исходима могуће повећати.²

Један од начина да се такво стање у историографији у извесној мери коригује налази се у пољу интердисциплинарности, у чему историографија заостаје за другим дисциплинама, поготово када је у питању њено укрштање са природним наукама.³ Осим тога, развој савремене

1 Џон Тош, *У истрајању за историјом: циљеви, методи и нови правци у истраживању савремене историје* (Београд: Слио, 2008), 228.

2 О врстама истине погледати детаљније у: Корнелије Квас, *Истина и њојина* (Нови Сад: Академска књига: 2011) – Историографској истини одговара такозвани „консензусни тип истине”; О могућности објективног сазнања у историографији: Мирослав М. Поповић, „О легитимитету историјске науке и њеног сазнања у новијој теорији историје”, *Антропологија* 23, бр. 2 (2023), 29–51; Сима Ђирковић, *О историографији и методологији* (Београд: Историјски институт, 2007); Арнолд Тојнби, *Проучавање историје* (Подгорица: ЦИД, Београд: Службени лист СРЈ, 2002); Ричард Ц. Еванс, *У одбрану историје* (Београд: Српска књижевна задруга, 2007); Андреј Митровић, „Писати историју како је уистину било – разматрања о смислу начела објективности”, *Проштивање Клио: оледи о историјском у историографији* (Београд: Новинско-издавачка установа „Војска” 1996), 105–136; Робин Ц. Колингвуд, *Идеја историје* (Београд: Службени лист СЦГ, 2003); Чедомир Попов, „Објективност и ангажованост историчара”, *О историји и историчарима* (Сремски Карловци, Нови Сад: Издавачка књижевна Зорана Стојановића, 1999), 13–27; Ерлинг Сандму, *Време и историја: о истраживању савремене историографије и историјским истраживањима* (Лозница: Карпос, 2019); Мирослав Јовановић, Радивој Радић, *Криза историје: српска историографија и друштвени изазови краја 20. и почетка 21. века* (Београд: Удружење за друштвену историју, 2009); Мирослав Јовановић, „Теорија изнад теорије – који је понуђени пут? Четири тезе за једно необавезно размишљање”, *Годишњак за друштвену историју*, бр. 2 (1995), 286–289; Михаел Антоловић, „Неколико запажања о историографији, културном трансферу и превођењу”, у: *Самислилац. О ирведоцима и ирведоцима*, ур. Гордана Ђерић (Београд: ИЕС, 2025), 25–44.

3 Дobar пример интердисциплинарног приступа могао би бити чланак: Žarko Martinić, „Primena psihoanalize u istoriografiji”, *Istorija 20. veka*, br. 1–2 (1984), 125–147;

српске историографије у том правцу успорава и њена несклоност ка развоју и примени теоријских модела и нових методологија.

Смисао сусрета историографије и математике, односно физике, је, поред осталог, у томе што физика и математика приморавају историографију на постављање фундаменталних питања, којима је она, у контексту савремене науке, све ређе наклоњена.⁴ У историји историографије су постојале школе мишљења или појединци који су разматрали фундаментална (велика) питања, попут Арнолда Тојнбија или Фернана Бродела, а у домаћој историографији би, поред осталих, примери могли бити Радослав Грујић,⁵ Милорад Екмечић⁶ или Мирослав Јовановић.⁷ Но, у савременој историјској струци све је мањи број радова који преиспитују начелна питања или метанаративе. Отуда изградња научног модела којим се може анализирати демографска динамика у дугим историјским периодима погодује запостављеним историографским приступима и објашњењима историјских процеса дугог и средњег тока у чијој се сржи налазе демографске теме. И само питање демографије, односно броја, темељно је (али ретко достижно) питање историјске науке.⁸

У новије време: Dušan Pavlović, *Teorija igara. Osnovne igre i njihova primena* (Београд: Факултет политичких наука, 2014); Božo Stojanović, *Teorija igara. Elementi i primena* (Београд: Службени гласник: IES), 2005.

- 4 О критици савременог научног система у: Петар Драгишић, *Die verlorene Wissenschaft. Versuch einer Katharsis nach Corona*, herausgegeben von Klaus Buchenau und Matthias Fechner. Hannover-Stuttgart: Ibidem Verlag, *Токови историје*, бр. 2 (2024), 370–373; Миша Ђурковић, *Ћети служи наука у Србији*, датум приступа 19. 11. 2025, <https://standard.rs/2025/07/20/cemu-sluzi-nauka-u-srbiji/>
- 5 Радослав Грујић, *Политичко-верска активност Вајингана на Балкану кроз векове* (Београд: Catena mundi, 2020).
- 6 Милорад Екмечић, *Дуго кретање између клања и орања: историја Срба у Новом веку (1492–1992)*, (Београд: Евро-Ђунти, 2011).
- 7 Мирослав Јовановић, *Срби и Руси, 12–21. век: историја односа* (Београд: Народна библиотека Србије, 2012).
- 8 Изузетак представљају радови неколицине историчара: Милош Јагодић, „Процена броја Срба (1880–1910)”, *Српске студије*, бр. 1 (2010), 39–80; Александра Вулетић, „Колико душа живи у једној кући? Број чланова домаћинства у Србији (1834–1910)”, *Српске студије*, бр. 3 (2012), 219–144; Војин Дабић, „Морталитет и старосна структура српског становништва у Хабсбуршкој монархији у XVIII веку. Примери православних парохија Вуковар, Итебеј, Дериње”, *Српске студије*, бр. 5 (2014), 13–45; Нино Делић, „Српско православно становништво Далмације и Војне крајине (1828–1848) – број, наталитет, морталитет, нупцијалитет, природни и механички

Теорија и модел

Пре него што пређемо на објашњење формирања модела, важно је указати на природу односа између научне теорије и научног модела. Док у математици и семантичком приступу филозофији науке⁹ разлика између теорије и модела практично не постоји, у историографији је неопходно указати на постојање разлике. Укратко: теорија истовремено обезбеђује оквир теме и појмове (изведен из малог скупа очигледно тачних претпоставки) којима се описују објекти (конкретни или апстрактни) и њихова међудејства, неопходни за организацију и разумевање опажања и уочених логичких веза. При конструкцији теорије тежи се максималној детаљности како би се предвиђања теорије што више приближила стварности. Ипак, објекат испитивања је често толико сложен да се тим степеном комплексности не може разумети нити објаснити готово ништа.¹⁰

Модел, с друге стране, чини логички, односно непротивречан подкуп објеката и описа понашања најнижег степена детаљности потребне за разумевање значаја и вредности одређених међудејстава која су у теорији дозвољена. Поред једноставности, неизоставни спољни чинилац који одређује избор подкупа је и дозвољено одступање предвиђања модела од опажања. Вештина моделовања огледа се у проналажењу контекста у којем дејство супротстављених чинилаца, који иначе делују напореда, у моделу делује распрегнуто. Тиме се постиже изолација доминантног утицаја и, с једне стране, омогућава провера (тестирање) научних хипотеза (претпоставки), а с друге стране, предвиђање до тог тренутка неопаженог понашања.¹¹

Већ се и идеја о провери хипотезе у историографији налази на рубовима прихватљивости, јер хуманистичке науке, па и историографију, од

прираштај”, *Српске студије*, бр. 5 (2014), 55–77; Милош Јагодић, „Процена демографских губитака Срба у периоду 1910–1921 *Српске студије*, бр. 6 (2015), 11–65.

9 Roman Frigg, „Scientific Representation and the Semantic View of Theories”, *Theoria* 55, no. 2 (2006), 183–206.

10 Ово је посебно изражено у биологији и хуманистичким наукама.

11 Пример односа теорије и модела погледати у чланку: Оливера Драгишић, „О ‘чистом’ и ‘опасном’ на пољу историографије. Неколико примера”, у: *Наслеђе Андреја Мишировића. Зборник радова са конференције одржане йоводом десетй йодина од смрти йрофесора Мишировића*, ур. Немања Радоњић, (Београд: Филозофски факултет, 2024), 401–415.

егзактних наука раздваја управо немогућност извођења експеримента. Но, дозволимо на тренутак и такву могућност да је и у друштвеним наукама, бар у домену теорије, експеримент (мисаони, математички) могућ, и да он има функцију поспешивања научних резултата.

На први поглед парадоксално делује чињеница да математички приступ постаје користан онога момента када се детаљи објекта проучавања занемаре и објекат поистовети са листом апстрактних математичких својстава.¹² На овај начин се постиже: прецизан, непротивречан, мерљив и објективан опис понашања, данас универзално прихваћен у природним наукама.

Конструкција модела: ирејийосџавке и домен важења

Као и у другим научним гранама, и у историографији је методологија праћења одређених феномена неопходан поступак, посебно у оним историјским распонима који су у историографији описани и прихваћени као „историја средњег” и „историја дугог трајања”.¹³ Док се у другим дисциплинама истраживачи можда и могу ослонити на континуитете и непрекинуте, униформне низове података који следе једни за другима или проистичу једни из других, у историографији то најчешће није случај. Историчари се обично суочавају са значајним празнинама, које се могу описати као „беле мрље” у историографској грађи, на основу којих се развила читава једна историографска дисциплина 80-их година прошлог века, препозната као „историја незнања”.¹⁴

Могућу прецизну реконструкцију динамике кретања становништва између два пописа којима историографија располаже, односно равнотежну расподелу становништва, може обезбедити школа мишљења која

12 Уколико нас занима количина жита у цаку, природно је занемарити сва својства која чине свако зрно јединственим и свести га само на број (редни број, масу, запремину итд.).

13 Концепте „Историје дугог” и „средњег трајања” развио је француски историчар, аналита, Фернан Бродел; Pavle D. Milenković, „Fernan Brodel i dugo trajanje”, *Sociologija*, br. 1 (2001), 59–80.

14 Гордана Ђерић, „Знати а не знати како знамо. Историја незнања и нови прилози осветљавању друштвене улоге преводилаштва”, у *Самислилац. О иреводиноцима и иреводилашћиву*, ур. Гордана Ђерић (Београд: ИЕС, 2024).

се развија у оквиру теоретског одељења лабораторије за физику 010 Института за нуклеарне науке „Винча”, препозната као *Београдска морфолошка школа*. Њен назив „морфолошка” заснован је на могућности читања информација из облика графикана.¹⁵ Другим речима, између два статистичка податка која су међусобно удаљена једну деценију, не располажемо ничим другим осим обликом графикана из којег се могу читати недостајући подаци. Само читање информација из облика представља нов методолошки приступ који ће бити демонстриран и у овом раду.

При математичком уобличавању модела претпостављено је да су промене у популацији непрекидне у времену, што значи да је интервал времена у којем нико није рођен занемарљиво мали, а да је прираштај популације у времену диференцијално мала величина првог реда. Строго гледано описана претпоставка *континуитета* представља идеализацију, јер је у реалности доношење детета процес који траје девет месеци, а само рођење представља дискретну промену броја становника за 1. Исто важи и за смртност. У реалности вероватно постоји интервал времена у којем нико није умро, али је тај интервал у оквиру модела занемарљиво мали. Такође, нису праћени животи појединаца, нити су у обзир биле узимане појединости као што је сам процес удварања, слобода одабира партнера или разни узроци смртности, јер је то неизводљиво. У моделу су промене популације малтузијанског типа, са промењивом стопом наталитета и морталитета у зависности од узраста и времена, истражене средњим бројем рођених, односно умрлих у јединици времена. Овим се претпоставља да је у сваком малом интервалу времена број потомака и смрти популације одређене животне доби пропорционалан само броју особа, што даље значи да се оба процеса дешавају постојано (по аутоматизму), а не спонтано (што је свакако

15 Marko Ćosić et al, „The Topological Origin of the Shape Stability Observed in Angular Distributions of the Axially Channeled Protons”, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 186 (2024), 1–8; Marko Ćosić, Nadica Miljković, „The Global Morphological Analysis of a Time-Delay Embedding of the Scalar Time Series”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 112 (2024), 15133–15161; Sanja Z. Despotović, Marko Ćosić, „The Morphological Analysis of the Collagen Fiber Straightness in the Healthy Uninvolved Human Colon Mucosa Away From the Cancer”, *Frontier in Physics*, no. 10 (2022), 1–12; Marko Ćosić et al, „Morphological Study of the Rainbow Scattering of Protons by Graphene”, *Chaos. An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, no. 9 (2021), 093115-1–093115-19.

ближе реалности). Додатно је претпостављено да у репродукцији учествује само популација одређених узраста. Граница за „плодне” и „неплодне” људе је постављена оштро, али према већ усвојеним биолошким и медицинским критеријумима: од 15 до 45 година. Не знамо где је тачно та граница појединачно и још горе – претпостављамо да је за свакога иста. Међутим, налазимо да је то разумно, јер је изнесени број трудноћа пре петнаесте године, као и после четрдесет и пете године, занемарљиво мали да би значајно утицао на модел. Осим тога, располажемо само бројем рођене деце на укупну популацију, иако би било идеално да располажемо бројем рођене деце на репродуктивном становништву (15–45). Пошто кроз модел тежимо обради крупних (наративних) података, такви детаљи нас овом приликом нису интересовали. То не значи да сви рубни проблеми с правом не заслужују засебне студије и чланке.

Математички детаљи модела

У демографији и популационој биологији кретање старосне структуре популације описује се Меккендриковом једначином,¹⁶ која се најчешће анализира и решава методом *карактеристика*.¹⁷

Карактеристике представљају путање покретног координатног система у којем се парцијалне диференцијалне једначине локално свде на једноставнији систем обичних диференцијалних једначина. Иако концептуално јасан, овај метод је веома тешко применити у нумеричким прорачунима због тешкоће поуздане процене извода на неуниформним и прилагодљивим мрежама. Ради комплетности и једноставније имплементације овде ће бити дато извођење Меккендрикове једначине у којој примарну улогу има Фуријеова анализа.¹⁸

Нека величина τ означава старост особе, и нека је $\tau_m \leq \tau < \tau_M$ опсег у коме се креће старост појединца. Доња граница је очигледно $\tau_m 0$,

16 James D. Murray, *Mathematical Biology. I. An Introduction* (New York: Berlin: Heidelberg: Springer-Verlag, 2001), 36–40.

17 Richard Courant, David Hilbert, *Methods of Mathematical Physics: Volume II, Partial Differential Equations* (New York: Wiley and Sons, 1962)

18 Athanasios Papoulis, *The Fourier Integral and Its Application* (New York: McGraw-Hill College, 1962)

док за τ_M усвајамо неки велики број (нпр. $\tau_M 150$)¹⁹. Посматрајмо сада популацију у тренутку t сачињену од великог броја појединаца $N(t)$ разних животних доби. Изделимо опсег $[\tau_m, \tau_M]$ на M под-интервале ширине $\Delta\tau = (\tau_M - \tau_m)/M$, са центрима на $\tau_k \tau_m + (k - 1/2)\Delta\tau$ (где је $k=1, 2, \dots, M$), и нека вектор $N_k(t)$ садржи бројеве особа узраста из опсега $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ у тренутку t . Када је $M \rightarrow \infty$ разломак $N_k(t)/\Delta\tau$ тежи функцији $n(\tau; t)$ која се назва расподела старости становништва и која поседује следеће особине:

$$n(\tau < \tau_m; t) = 0, \quad n(\tau > \tau_M; t) = 0, \quad N(t) \int_{\tau_m}^{\tau_M} n(\tau; t) d\tau. \quad (1)$$

Другим речима, не постоје особе негативног узраста, као ни особе старије од τ_M , а укупни број особа свих животних доби је $N(t)$. Додатно је $n(\tau; t)$ у физичком опсегу $\tau_m \leq \tau \leq \tau_M$ непрекидна функција.

На први поглед, уведене дефиниције делују непотребно сложене, међутим проширење домена функције n омогућава нам да искористимо Фуријеову анализу и помоћу прозорске функције:

$$W(\tau) \begin{cases} 1 & \text{за } \tau \in [\tau_m, \tau_M] \\ 0 & \text{за } \tau \notin [\tau_m, \tau_M] \end{cases} \quad (2)$$

од произвољне густине $n(\tau; t)$ интегралном трансформацијом²⁰

$$n(\tau; t) \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \int_{\tau'} \exp[i\omega(\tau - \tau')] W(\tau') n(\tau'; t) d\omega d\tau', \quad (3)$$

добијемо нову функцију $n(\tau; t)$ која задовољава граничне услове (1). У релацији (3) $i\sqrt{-1}$ је имагинарна јединица, а опсежи интеграције су $-\infty < \omega < \infty$ и $-\infty < \tau' < \infty$.

У одсуству природног прираштаја, старење популације $\tilde{n}(\tau; t)$ за Δt производи нову расподелу $n(\tau; t + \Delta t)$ идентичну са расподелом $n(\tau; t)$ помереном у правцу τ осе за Δt . Обележимо са $\mathbf{T}_{\Delta t}$ описану операцију временске трансформације. Приметимо да је на основу (3) оператор $\mathbf{T}_{\Delta t}$ идентичан следећој интегралној трансформацијом:

19 τ_M је горња граница опсега који се посматра и не одговара максималној могућој старости појединца за коју је процењено да се креће између 122 и 125 година – у: Xiao Dong et al, „Evidence for a Limit of a Human Lifespan”, *Nature*, vol. 538 (2016), 257–259; Byung Mook Weon, Jung Ho Je, „Theoretical Estimation of Maximal Human Lifespan”, *Journal of Biosciences and Medicines. Biogerontology*, no. 10 (2009), 65–71; Уколико би усвојили да је $\tau_M < 125$ модел би очигледно давао погрешне резултате; Вид. и напомену 37.

20 Dong et al, „Evidence for a Limit of a Human Lifespan”, 257–259; Weon, Je, „Theoretical Estimation of Maximal Human Lifespan”, 65–71.

$$\mathbf{T}_{\Delta t} \cdot n(\tau; t) \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \int_{\tau'} \exp[-i\omega\Delta t] \exp[i\omega(\tau - \tau')] W(\tau') n(\tau'; t) d\omega d\tau' \quad (4)$$

Старење популације за $k\Delta t$ (при чему k произвољни позитиван цео број) описано је једначином.

$$n(\tau; t + k\Delta t) (\mathbf{T}_{\Delta t})^k \cdot n(\tau; t) n(\tau - k\Delta t; t). \quad (5)$$

Претпоставимо сада да су промене популације малтузијанске са средњом расподелом стопе наталитета $\nu(\tau; t)$ и морталитета $\mu(\tau; t)$ израженим средњим бројем живорођене деце родитеља старости τ , односно смрти становника старости τ на 1000 становника за годину дана.²¹ По конвенцији је $\nu(\tau; t), \mu(\tau; t) \geq 0$. Приметимо да је без обзира на временску зависност функција $\nu(\tau; t) \neq 0$ само у биолошки условљеном репродуктивно активном интервалу узраста $\tau_r \leq \tau \leq \tau_R$. С друге стране, биолошка је чињеница да функција $\mu(\tau; t)$ има мале вредности у интервалу $\tau_r \leq \tau \leq \tau_R$, док се велике вредности налазе у интервалу $\tau_R \leq \tau \leq \tau_M$. Највећу вредност $\mu \approx 1$ стопа морталитета досеже у околини максимално могуће старости појединца тј. за $\tau > 125$.²²

Након времена Δt број особа старости између τ и $\tau + d\tau$ (са $\tau > 0$),

$$n(\tau; t + \Delta t) d\tau \mathbf{T}_{\Delta t} \cdot n(\tau; t) d\tau - \mu(\tau; t) n(\tau; t) \Delta t d\tau, \quad (6)$$

једнак је броју особа који су узраст τ досегли старењем $\mathbf{T}_{\Delta t} \cdot n(\tau; t) d\tau$, умањеног за број умрлих $\mu(\tau; t) n(\tau; t) \Delta t d\tau$ старости τ . С друге стране, после времена Δt број новорођенчади $n(0; t + \Delta t) d\tau$ једнак је броју живорођење деце умањеног за смртност новорођенчади:

$$n(0; t + \Delta t) d\tau \int_{\tau'} \nu(\tau'; t) n(\tau'; t) d\tau' \Delta t - \mu(0; t) n(0; t) \Delta t d\tau. \quad (7)$$

Допустимо сада да $\Delta t \rightarrow 0$. Развојем експоненцијалне функције у ред:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \quad (8)$$

21 Alfred J. Lotka, *Analytical theory of biological populations* (New York and London: Springer, 1989)

22 Због ове особине функције μ , вредност $\tau_M > 125$ нема никакав утицај на понашање модела. С друге стране, усвајањем $\tau_M = 150$ и наметањем граничних услова једначинама (2) и (3), ослобођени смо потребе познавања тачног облика функције $\mu(\tau > 125)$. Строго гледано, без граничних услова (2) и (3) било би неисправно користити средњу стопу морталитета целе популације у моделу који се лако налази у статистичким годишњацима.

и занемаривањем чланова са $\Delta t^2, \Delta t^3, \dots$ као малих величина вишег реда, уз коришћење идентитета:

$$\int_{\omega} \exp[\omega(\tau - \tau')] d\omega \cdot 2\pi \delta(\tau - \tau'), \int_{\tau'} n(\tau') \delta(\tau - \tau') d\tau' n(\tau) \quad (9)$$

оператор временске транслације $T_{\Delta t}$ се поједностављује на:

$$T_{\Delta t} \cdot n(\tau; t) \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \int_{\tau'} (1 - i\omega\Delta t) \exp[i\omega(\tau - \tau')] n(\tau'; t) d\tau' d\omega, \quad (10)$$

$$n(\tau; t) - \frac{\Delta t}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\omega} \int_{\tau'} \exp[i\omega(\tau - \tau')] n(\tau'; t) d\tau' d\omega n(\tau; t) - \Delta t \frac{\partial}{\partial \tau} n(\tau; t),$$

где је $\pi_{3,14} \dots$ Архимедова константа. Како је по дефиницији:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (n(t + \Delta t; \tau) - n(t; \tau)) \frac{\partial}{\partial t} n(\tau; t), \quad (11)$$

дељењем са $d\tau$ и налажењем граничне вредности $\Delta t \rightarrow 0$, једначине (6) и (7) се претварају у Меккендрикову парцијалну диференцијалну једначину:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\tau; t) + \frac{\partial}{\partial \tau} n(\tau; t) - \mu(\tau; t) n(\tau; t), \quad (12)$$

са граничним условом:

$$n(0; t) \int_{\tau_r}^{\tau_R} v(\tau'; t) n(\tau'; t) d\tau', \quad (13)$$

чије решење захтева познавање старосне структуре популације у почетном тренутку $n(\tau; 0) n_0(\tau)$.

Анализа њойиса

Тачност развијеног математичког модела биће проверена поређењем са емпиријским подацима о кретању становништва Југославије у периоду од 1953. до 1981. године сакупљеним од стране Савезног завода за статистику.²³

23 Југославија 1918–1988, *статистички годишњак* (Београд: Савезни завод за статистику, 1989)

Резултати пописа 1953, 1961, 1971. и 1981. год. приказани су у табели 1. У складу са демографском праксом тога времена, старост становништва је приказана у опсезима од по пет година. Овакав начин приказа смањује статистичке флукуације, неизбежно присутне у сировим подацима, по цену увођења коначне резолуције $\Delta\tau_{\text{res}}5$ (година)²⁴ расподела старости популације, коју увек треба имати у виду при интерпретацији резултата.

Да би конструисали непрекидне функције расподеле $n(\tau)$, бројеви становника (из друге до пете колоне) придружени су центрима опсега приказаних у првој колони табеле 1, а непознате вредности између одабирака одређене Хермитеовим кубним интерполационим полиномима,²⁵ посебно конструисаним тако да се избегну нефизичке осцилације, пребачаји и подбачаји интерполираних вредности и тиме очува облик интерполационе функције.²⁶ У случају уноса у последња два реда табеле, било је неопходно одлучити којем узрасту одговарају. Тако је усвојено да се поље „старији од 75 година” односи на интервал 75–109 година, док је за поље непознато усвојено да се односи на популацију фиктивне старости у опсегу од 110–149 година. Више техничких детаља конструкције интерполационих функција дато је у додатку 1.

Табела 1. Попис становништва Југославије у периоду 1953-1981.

старост	година			
	1953	1961	1971	1981
0–4	2 053 951	1 936 817	1 795 512	1 862 656
5–9	1 513 025	2 001 059	1 831 567	1 837 285
10–14	1 607 862	1 832 941	1 873 176	1 787 851
15–19	1 761 722	1 378 104	1 984 944	1 845 050
20–24	1 727 466	1 581 552	1 754 327	1 860 335

24 У метрологији се резолуција дефинише као најмања поуздано разлучива разлика вредности величине која се посматра; Nadica Miljković, *Metodi i instrumentacija za električna merenja* (Beograd: Akademska misao, 2020)

25 Frederick N. Fritsch, Richard E. Carlson „Monotone Piecewise Cubic Interpolation”. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, no. 2 (1980), 238–246.

26 Ito; David Kahaner et al, *Numerical Methods and Software* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall 1988)

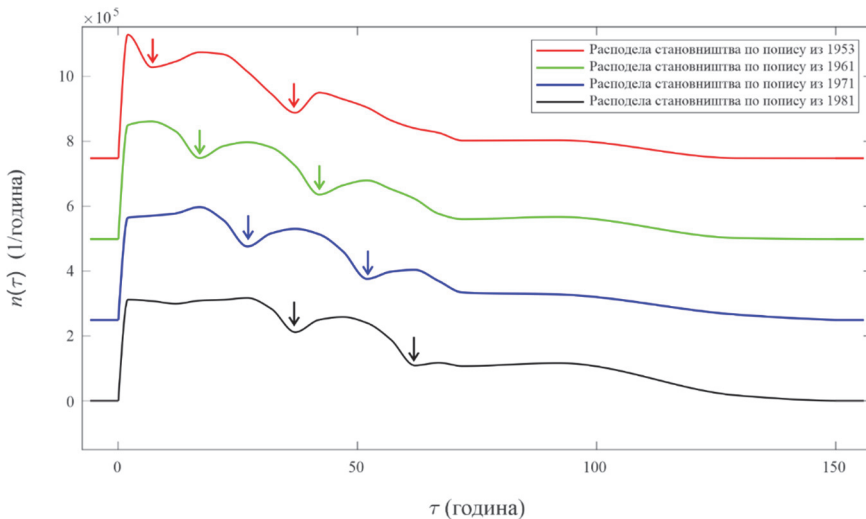
25–29	1 440 119	1 647 532	1 291 218	1 894 128
30–34	1 071 126	1 558 384	1 522 805	1 695 105
35–39	755 409	1 245 489	1 601 852	1 263 886
40–44	1 090 487	757 198	1 505 700	1 491 695
45–49	981 485	914 658	1 203 386	1 543 830
50–54	84 4475	997 905	722 020	1 433 581
55–59	630 750	851 017	848 281	1 126 062
60–64	497 512	683 499	881 003	650 678
65–69	422 632	430 401	683 705	700 799
70–74	293 372	338 191	482 448	639 381
75 и више	298 784	377 228	448 749	694 298
непознато	1 272	17 316	92 279	98 091
Укупно	16 991 449	18 549 291	20 522 972	22 424 711

Овакав избор, учињен је из више разлога. Прво, старији од 75 година сигурно не учествују у репродукцији становништва и стога је њихова бројност демографски небитна. Примарна функција уведених групација је да бројност популације велике старости постепено сведе на нулу, јер сваки нагли пад популације има изражено негативан утицај на тачност нумеричких прорачуна. Друга могућност била би да се занемари сва популација старости веће од 75 година. Међутим, овај избор не решава нумеричке проблеме, већ их усложњава, јер је тада потребно избрати узрасте и бројност додатне *фиктивне* популације којом би се минимизовала нумеричка грешка. Вођени Окамовим принципом,²⁷ одлучили смо се да предност дамо моделу са мање слободних параметара. С друге стране, занемаривање ове популације онемогућава праћење кретања бројности целокупне популације која је лако проверљива на основу пописа. Наравно, у интерпретацији резултата потребно је уздржати се од тумачења икаквих својстава расподела за старости веће од 75 година.

Конструисане расподеле становништва су дате на слици 1. Ради боље прегледности, криве које одговарају пописима из 1953, 1961. и

27 Jonathan Schaffer, „What Not to Multiply Without Necessity”, *Australian Journal of Philosophy*, vol. 93 (2015), 644–664.

1971. године су отклоњене у вертикалном правцу. Приметимо да су све криве скоро идентичног облика који се може описати комбинацијом експоненцијално-опадајућег тренда, поремећеног са по два изражена локална минимума чије су позиције на слици 1 обележене стрелицама. Приметимо још да је растојање између црвених стрелица (29,90 година) значајно веће него између зелених (25,61 година), плавих (24,99 година) и црних стрелица (24,99). Како описани минимуми представљају изражен мањак популације само одређене уске групе узраста, они морају бити и узроковани чиниоцима који делују само на одређену популацију (епидемије које погађају нпр. децу, велики ратови у којима преко мере страдају регрути...). Стога ће овакви минимуми бити названи *демографским оживљцима* којима ће бити посвећена посебна пажња у наредном поглављу, у коме ће бити дата и прецизнија дефиниција.



Слика 1 Графички приказ расподеле становништва конструисане на основу података из Табеле 1.

Ради боље прегледности расподеле су смакнуте у вертикалном правцу. Стрелице приказују демографске оживљке у релевантном интервалу старости $0 \leq \tau \leq 75$.

Табела 2. Крећанње стоје најалијетиа и морталијетиа
 сјановништва Јуославије у ѱериоду 1953–1981.

	године																
	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
$\bar{\nu}$ (‰)	28,4	28,6	26,9	26	23,9	24	23,4	23,5	22,7	21,9	21,4	20,8	21	20,3	19,6	19,1	18,9
$\bar{\mu}$ (‰)	12,4	10,9	11,4	11,2	10,7	9,3	9,9	9,9	9	9,9	8,9	9,4	8,8	8,1	8,8	8,7	9,3
	1970										1981						
	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981					
$\bar{\nu}$ (‰)	17,8	18,3	18,3	18,1	18,1	18,2	18,2	17,7	17,4	17,1	17,1	16,4					
$\bar{\mu}$ (‰)	8,9	8,7	9,2	8,6	8,4	8,7	8,5	8,4	8,7	8,6	8,8	9					

Одговарајуће средње стопе наталитета и морталитета – дефинисане као однос броја живорођених, односно умрлих на 1000 становника укупне популације²⁸ и обележене са $\bar{\nu}$ и $\bar{\mu}$ – дате су у слици 1. Графички приказ расподеле становништва конструисане на основу података из Табела 1.

Ради боље прегледности расподеле су смакнуте у вертикалном правцу. Стрелице приказују демографске ожиљке у релевантном интервалу старости $0 \leq \tau \leq 75$.

Табела 2. Функције $\bar{\nu}(t)$ и $\bar{\mu}(t)$, конструисане на основу података из слике 1. Графички приказ расподеле становништва конструисане на основу података из табеле 1.

Ради боље прегледности расподеле су смакнуте у вертикалном правцу. Стрелице приказују демографске ожиљке у релевантном интервалу старости $0 \leq \tau \leq 75$.

Табела 2, приказане су на слици 2(а). Слика такође приказује тренд-линије опадања ових функција добијених дигиталним филтрирањем помоћу правоугаоног прозора ширине 10 одабирака.²⁹ Уочљиво је

28 Јуославија 1918–1988, сјатаистички јодисњак.

29 Alan V. Oppenheim et al, *Discrete-Time Signal Processing* (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall 1999).

да стопа наталитета постојано опада уз мање осцилације, а стопа морталитета опада до 1967. године. Задатак историографије био би да размотри околности које су на такав тренд утицале.

Прво питање које се мора испитати је у коликој мери су конструисане расподеле са сл. 1 у складу са претпостављеним малтузијанским моделом датим једначинама (12) и (13), поготово због чињенице да подаци о узрасној стопи морталитета и наталитета нису доступни, па се непознате функ. $\nu(\tau; t)$ и $\mu(\tau; t)$ морају заменити познатим τ -усредњеним функцијама $\bar{\nu}(t)$ и $\bar{\mu}(t)$. Праволинијски метод за то би био да се конструисана расподела $n(\tau; t)$ замени у једначини (12) и одреди колико се лева страна једнакости разликује од десне. Међутим, како расподела $n(\tau; t + \Delta t)$ није позната (због чега кретање популације уопште и описујемо математичким моделом), вредности функције $\partial_t n(\tau; t)$ не могу бити поуздано процењене, што праволинијски метод чини непримењивим. Конструкција расподеле $n(\tau; t)$ – детаљно описана у додатку 1 – гарантује важење једначине (13), стога њено испитивање не доводи до новог сазнања.

Међутим, могуће је проверити у којој мери је уочени експоненцијални тренд опадања расподела $n(\tau; t)$ у сагласју са претпостављеним малтузијанским моделом. Расподела $n(\tau; t)$ се увек може представити збиром:

$$n(\tau; t)A(t) \exp[-\alpha(t)\tau] + \delta n(\tau; t) \approx A(t) \exp[-\alpha(t)\tau],$$

где је $A(t)$ непозната функција, $\alpha(t)$ непозната константа опадања, а $\delta n(\tau; t)$ функција поремећаја експоненцијално-опадајућег тренда која је ради једноставности занемарена! Заменом претпостављеног облика (14) у једначине (12) и (13) добијамо:

$$\partial_t A(t) - \alpha(t)A(t) - \mu(t)A(t) \Rightarrow A(t)A(0) \exp \left[\int_0^t (\alpha(t') - \bar{\mu}(t')) dt' \right],$$

и

$$\frac{\alpha(t)}{\exp[-\alpha(t)\tau_r] - \exp[-\alpha(t)\tau_R]} \bar{\nu}(t).$$

Једначина (16) значи да је експоненцијални тренд у сагласју са претпостављеним моделом само када је функција $\nu(\tau; t)$ приближно константна за $\tau_r \leq \tau \leq \tau_R$. Приметимо да се стопа наталитета изражава промилима у односу на укупну популацију, а не на плодни део попула-

ције узраста $15 \leq \tau \leq 45$ година,³⁰ што би било динамички исправније. Стога, коришћење вредности из слике 1 Графички приказ расподеле становништва конструисане на основу података из табеле 1.

Ради боље прегледности расподеле су смакнуте у вертикалном правцу. Стрелице приказују демографске оживљке у релевантном интервалу старости $0 \leq \tau \leq 75$.

Табела 2 захтева да се усвоји $\tau_r \tau_m 0$ и $\tau_R \tau_M 150$.

Заменом ових вредности у једначину (16) и решавањем добијене нелинеарне једначине Њутновом методом са прилагодљивим интервалима поверења,³¹ налазимо да је константа опадања црвене криве са слике 1 $\alpha(1953)0,02802 \approx \bar{v}(1953)0,02840$. Како је једначина (16) нелинеарна, тачнија процена константе опадања се добија ако се средња стопа наталитета \bar{v} замени стопом наталитета плодног дела популације \tilde{v} по формули:

$$\tilde{v}(t) \frac{\int_{\tau_m}^{\tau_M} n(\tau, t) d\tau}{\int_{\tau_r}^{\tau_R} n(\tau, t) d\tau} \bar{v}(t),$$

за који је по референци³² $\tau_r 15$ и $\tau_R 45$. Заменом ових вредности у једначину (16) налазимо да је нова константа опадања $\tilde{\alpha}(1953)0,02412$.

Слика 2(б) приказује расподелу $n(\tau, 1953)n_{1953}(\tau)$ заједно са регресивним моделима средњег опадања $\bar{A} \exp[-\bar{\alpha}\tau]$ и $\tilde{A} \exp[-\tilde{\alpha}\tau]$, при чему су константе \bar{A} и \tilde{A} одређене методом минимизације квадратних одступања, односно:

$$\bar{A} \frac{\int_{\tau_m}^{\tau_M} n(\tau, t) \exp[-\bar{\alpha}\tau] d\tau}{\int_{\tau_r}^{\tau_R} \exp[-2\bar{\alpha}\tau] d\tau}, \quad \tilde{A} \frac{\int_{\tau_m}^{\tau_M} n(\tau, t) \exp[-\tilde{\alpha}\tau] d\tau}{\int_{\tau_r}^{\tau_R} \exp[-2\tilde{\alpha}\tau] d\tau}.$$

Без обзира на једноставност модела, обе зависности представљају одличне апроксимације експоненцијално-опадајућег тренда расподе-

30 Joyce A. Martin et al, „Births: Final Data for 2013”, *National Vital Statistics Reports*, no. 1 (2015), 1–68.

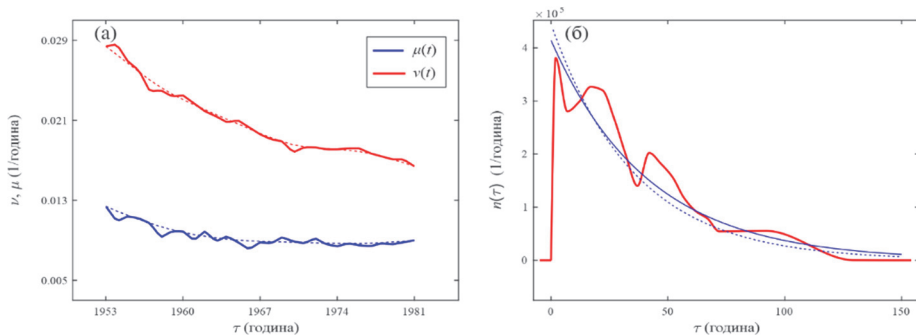
31 Danny C. Sorensen. „Newton’s Method with a Model Trust Region Modification”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, no. 2 (1982), 409–426.

32 Martin et al, „Births: Final Data for 2013”, 1–65.

ла. Једина квалитативна разлика између функција $\bar{A} \exp[-\bar{\alpha}\tau]$ и $\tilde{A} \exp[-\tilde{\alpha}\tau]$ јесте у томе што прва значајно прецењује густину живорођених, док је код потоње криве та грешка знатно мања. Детаљна анализа осталих случајева је потврдила наведене закључке. Стога можемо поуздано тврдити да су вредности приказане у табели 1 и слици 1 графички приказ расподеле становништва конструисане на основу података из табеле 1.

Ради боље прегледности расподеле су смакнуте у вертикалном правцу. Стрелице приказују демографске оживљке у релевантном интервалу старости $0 \leq \tau \leq 75$.

Табела 2 у сагласности са претпостављеним малтузијанским моделом кретања популације. С друге стране, ова чињеница имплицира да су непознате расподеле (нпр. између пописа) одредиве решавањем једначина (12) и (13) уколико су познате средње стопе наталитета и морталитета $\bar{v}(t)$ и $\bar{\mu}(t)$.



Слика 2(а) Функције $\bar{v}(t)$ и $\bar{\mu}(t)$ у периоду 1953–1981. конструисане на основу података из слике 1 графички приказ расподеле становништва конструисане на основу података из табеле 1.

Ради боље прегледности расподеле су смакнуте у вертикалном правцу. Стрелице приказују демографске оживљке у релевантном интервалу старости $0 \leq \tau \leq 75$.

Табела 2. Црвене линије приказују тренд-линије. (δ) Расподела $n_{1953}(\tau)$ дата црвеном линијом и два модела експоненцијалног одања $\tilde{A} \exp[-\tilde{\alpha}\tau]$ и $\hat{A} \exp[-\hat{\alpha}\tau]$ представљени испрекиданом и пуном црвеном линијом

Да бисмо потврдили ову тврдњу, узећемо да је почетна расподела $n_0(\tau)n_{1953}(\tau)$, $n_{1961}(\tau)$, $n_{1971}(\tau)$ и помоћу функција $\tilde{v}(t)$ и $\tilde{\mu}(t)$, пропагирати почетне расподеле – осам односно десет година у будућност, и покушати да репродукујемо расподеле $n_{1961}(\tau)$, $n_{1971}(\tau)$ и $n_{1981}(\tau)$. Зато је, по једначинама (12) и (13), потребно познавати стопу наталитета плодног дела популације \tilde{v} која није доступна уколико је $n(\tau)$ непознато. Постоје два могућа решења за овај проблем. Први је да се анализом примарних извора дође до података потребних за конструкцију функција $\tilde{v}(t)$ и $\tilde{\mu}(t)$ или идеално функција $v(\tau; t)$ и $\mu(\tau; t)$. Међутим, огроман додатни рад уопште не гарантује да ће конструисане функције омогућавати тачније решавање Меккендрикове једначине. Довољно је нпр. да број умрлих старости τ буде мали, па да функција $\mu(\tau; t)$ буде контаминирана статистичким флукуацијама велике амплитуде које неизбежно имају погубан утицај на тачност нумеричких прорачуна.

Због свега наведеног ми усвајамо стратегију приказану у претходном поглављу и постављамо $\tau_r, \tau_m, \tau_R, \tau_M$, а функције $v(\tau; t)$ и $\mu(\tau; t)$ замењујемо са $\tilde{v}(t)$ и $\tilde{\mu}(t)$. За дуга времена пропације ова апроксимација сигурно није оправдана, јер било какав поремећај популације за $\tau < \tau_r$ и $\tau > \tau_R$ аутоматски утиче на вредност $n(0, t)$, што је физички немогуће и стога неприхватљиво. Међутим, за кратка времена пропације $t < \tau_r$ што је овде случај, погрешно срачуната густина $n(0, t)$ неће стићи да утиче да расподелу потомака друге генерације и стога је сасвим могуће да грешка одређивања расподела $n(\tau; t)$ у овом случају буде прихватљива.

Добијене расподеле $n_{1953}(\tau; 8)$, $n_{1961}(\tau; 10)$ и $n_{1971}(\tau; 10)$ су на слици 3 приказане црвеним линијама заједно са расподелама $n_{1961}(\tau)$, $n_{1971}(\tau)$ и $n_{1981}(\tau)$, које су приказане плавим линијама. Детаљи алгоритма за решавање Меккендрикове једначине (12), са граничним условима (13), дати су у прилогу 1. Приметимо одлично слагање модела и пописа

у опсегу старости $14 \leq \tau \leq 75$ година. Модел верно репродукује позиције и дубине демографских ожиљака.

Већа разлика између нумеричких расподела и пописа се примећује за $\tau > 75$ година, што је очекивано, имајући у виду да тачна расподела становништва у овом опсегу није позната и да је конструисана применом конвенције изложене у почетним одељцима ове главе. Највећа квалитативна разлика је видљива за $\tau < 14$ година, где модел систематски предвиђа већу густину популације младих особа него што је то случај према попису (видети табелу 3). Описани *предачај* је главни извор грешке и укупне популације које према моделу износе:

$$\int_{\tau_m}^{\tau_M} n_{1953}(\tau; 8) d\tau \quad 19\,107\,936,$$

$$\int_{\tau_m}^{\tau_M} n_{1961}(\tau; 10) d\tau \quad 20\,920\,976, \quad (19)$$

и

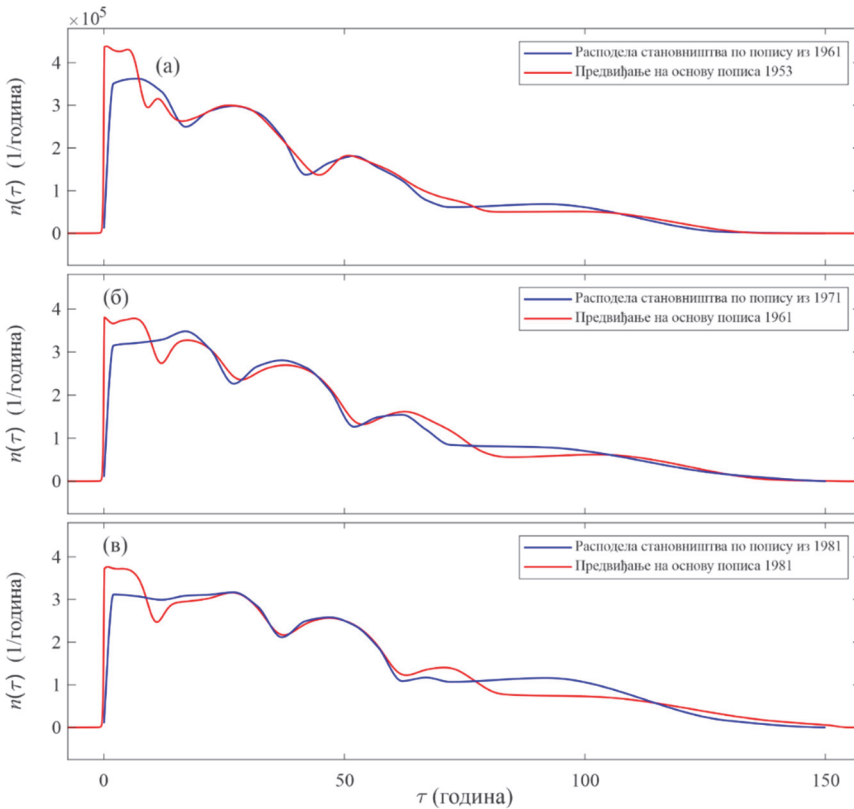
$$\int_{\tau_m}^{\tau_M} n_{1971}(\tau; 10) d\tau \quad 22\,461\,857.$$

веће су за 3,012%, 1,940% и 0,166% од одговарајућег укупног броја становника датог у табели 1 и могу се сматрати веома малим! Детаљније информације о расподели релативне грешке модела дате су у табели 3.

Табела 3. Расподела релативне разлике броја: деце ($0 < \tau \leq 15$), младих ($15 < \tau \leq 35$), особа средњих година ($35 < \tau \leq 65$), и старијих ($\tau > 65$), предвиђених моделом у односу на резултате пописа.

	$0 < \tau \leq 15$	$15 < \tau \leq 35$	$35 < \tau \leq 65$	$\tau > 65$
$(n_{1953}(\tau; 8) - n_{1961}(\tau)) / n_{1961}(\tau)$ (%)	10,269	0,672	1,453	-1,515
$(n_{1961}(\tau; 10) - n_{1971}(\tau)) / n_{1971}(\tau)$ (%)	11,371	-1,601	0,875	-1,881
$(n_{1971}(\tau; 10) - n_{1981}(\tau)) / n_{1981}(\tau)$ (%)	11,521	-1,959	1,246	-7,307

Описана одступања модела су очекивана из три разлога. Први је да средња стопа морталитета потцењује смртност мале деце и старих особа која су по правилу знатно већа од просека. Други разлог је коришћење функције $\bar{v}(t)$, уместо $\tilde{v}(t)$ уз $\tau_r \tau_m$, $\tau_R \tau_M$, за коју је показано да доводи до пребачаја броја младог становништва. Трећи је разлог техничке природе и последица је чињенице да само ретки алгоритми нумеричке математике имају униформну расподелу грешке по домену непознате функције. Такви алгоритми који представљају својеврстан „свети граљ“ нумеричке математике су по правилу веома сложени. Стога неуниформна грешка развијеног, поприлично грубог модела, не представља изненађење. Напротив, једноставност модела уз малу и контролисану грешку увелико надмашује све његове техничке несавршености.



Слика 3. Поређење резултата модела са расподелом становништва према попису. Плаве линије на сликама (а), (б) и (в) представљају рас-

поделе $n_{1961}(\tau)$, $n_{1971}(\tau)$ и $n_{1981}(\tau)$, док црвене линије представљају одговарајућа предвиђања модела на основу њојних расподела $n_0(\tau)$ - $n_{1953}(\tau)$, $n_{1961}(\tau)$, $n_{1971}(\tau)$.

Динамика популације

Неупућеном читаоцу се може чинити да је потребно уложити превише труда да би се добили резултати који су већ садржани у статистичким годишњацима. Иако провера конзистентности података није неважна, она је најмањи разлог конструкције математичких модела. Помоћу модела је некада могуће тестирати хипотезе на веома једноставан начин. У контексту анализираниг временског периода, оправдано је питати се да ли су пописивачи успели да тачно опишу популацију на привременом раду у земљама западне Европе.³³

Да би одговорили на ово питање, довољно је само обратити пажњу на практично савршено поклапање плавих и црвених криви са слике 3 у интервалу узраста $18 \leq \tau \leq 35$ година, који одговара делу популације склоној миграцији. Како конструисани модел не укључује миграцију становништва, можемо закључити да су пописивачи успешно предузели све потребне мере да се дође до тачног броја становника.

33 Статистика никада није ни приближно прецизно пописала број људи на привременом раду. Узрок томе је илегалан одлазак на рад у иностранство, док је само 15–20% становника прошло кроз институције система. Релативно поуздани извори који историчарима нису доступни били би банкарски рачуни емиграната. Многи од њих били су пријављени у обема земљама, а огроман број емиграната није био пријављен у иностранству. Такође треба имати у виду изузетно високу динамику одлазака и долазака емиграната у иностранство и назад. Ни немачка историографија нема педантне пописе. Примера ради, познато је да је 1973. године у Савезној Републици Немачкој друга по реду емиграција била југословенска (после турске) и да је број Југословена на раду у тој земљи износио 535.000 људи; У: Петар Драгишић, *Зигари њуђе среће. Београдска штампа о економском емигрирању из Југославије у Западној Европи крајем шездесетих и њојњом седамдесетих година* (Београд: ИНИС, 2019), 21. Према: Herbert Ulrich, *Geschichte der Ausländerpolitik in Deutschland. Saisonarbeiter, Zwangsarbeiter, Gastarbeiter, Flüchtlinge* (München: C. H. Beck, 2001), 198–201; Постоје и такви подаци по којима је 1960. године на раду у Европи било 18.000 радника из Југославије, а 1971. године 660.000. – Ivo Baučić, *The Effects of Emigration from Yugoslavia and the Problems of Returning Emigrant Workers* (The Hague: Nijhoff, 1972), 3.

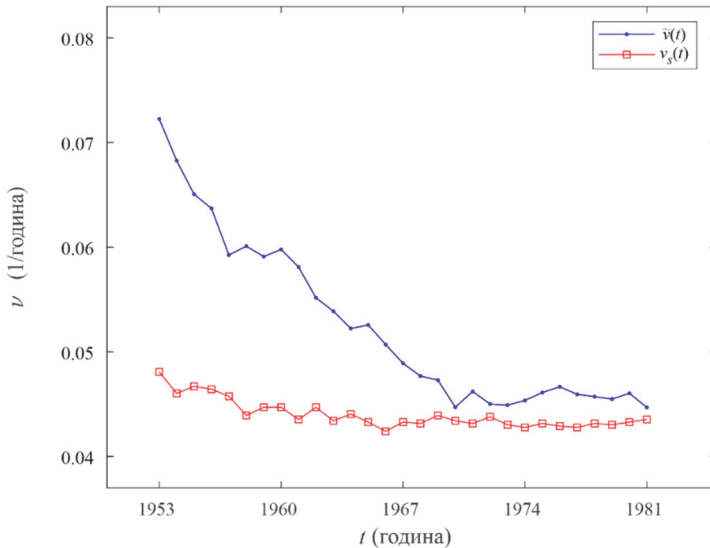
Корисност модела постаје очигледна када је потребно размотрити изведене величине које се не налазе у табелама или које се не могу поуздано срачунати на основу података временски раздвојених десет година. Пример оваквих величина били би стопа наталитета плодног дела популације $\tilde{v}(t)$, која се на основу познатог $n(\tau; t)$ може срачунати помоћу релације (17). Слика 4 приказује добијене вредности \tilde{v} у опсегу $1953 \leq t \leq 1981$ са резолуцијом од једне године. Добијени одабирци искоришћени су за конструкцију функције $\tilde{v}(t)$.

Међутим, права вредност модела долази до изражаја када се разматрају питања која је немогуће одговорити на основу опажања, као што су дугорочна стабилност становништва, облик равнотежне расподеле становништва или равнотежна вредност стопе наталитета. У равнотежи број становника се не мења, што захтева да је $\partial_t n = 0$. У додатку 2 је показано да је равнотежна расподела такође одређена релацијом (15), при чему је $\alpha(t)\bar{\mu}(t)$, а равнотежна стопа наталитета v_s , решење је једначине:

$$\frac{\bar{\mu}(t)}{\exp[-\bar{\mu}(t)\tau_r] - \exp[-\bar{\mu}(t)\tau_R]} v_s(t). \quad (20)$$

Црвена линија на слици 4 приказује функцију $v_s(t)$, одређену Њутновим методом са прилагодљивим интервалима поверења.³⁴ Као и функција морталитета, функција $v_s(t)$ опада до 1967. године, после чега остаје практично непромењена. Приметимо да је пре 1970. године стопа наталитета плодног дела популације $\tilde{v}(t)$ значајно већа од равнотежног нивоа, после чега се приближава функцији $v_s(t)$, што се огледа у постојаном повећању броја становника у посматраном периоду времена.

34 Sorensen, „Newton’s Method with a Model Trust Region Modification”, 409–425.



Слика 4. Вредности $\tilde{\nu}$, ν_s , и R_0 срачунајте са резолуцијом од једне године. Подаци су приказани плавим тачкама, црвеним квадрантима и црним кружићима. Плаве, црвене и црне линије су дајте збој јаснијеј приказу.

Демографски ожиљци

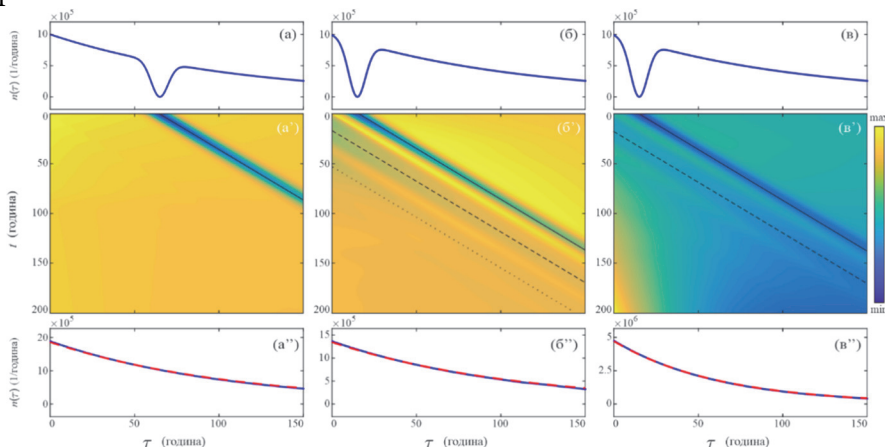
Испитивање кретања старости становништва завршићемо разматрањем динамике демографских ожиљака и њиховог утицаја на облик расподеле старости становништва. Демографске ожиљке дефинишемо као изражени локални мањак популације који је за ред величине већи од статистичких флукуација (односно око 10 пута) и чија ширина мора бити већа од једне године.

За разумевање ових ефеката неповољно је користити расподеле дате на слици 1 због њиховог веома сложеног облика. Ове расподеле по-седују по два ожиљка који, када се нађу у репродуктивном интервалу, утичу на облик укупне расподеле. Како су Меккендрикова једначина (12) и гранични услов (13) линеарне операције, доприноси појединачних ожиљака се могу посматрати независно. Стога почетну расподелу конструишемо од експоненцијале и Гаусијана по следећој формули:

$$n_0(\tau)N_0 \exp[-\mu\tau] \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\sigma^2} \right] \right\}, \quad (21)$$

тако да поседује само један дубоки ожиљак, при чему је $N_0 10^6$ почетна амплитуда, $\mu 0,00908$ средња стопа смртности шездесетих година, $\sigma 5$ (година) ширина ожиљка, а τ_0 почетна позиција ожиљка.

Размотримо прво еволуцију почетне расподеле (21) за τ_{065} приказане на слици 5(a) чији се ожиљак налази ван репродуктивног интервала $\tau_r < \tau < \tau_R$. Да бисмо избегли структуре настале променом стопа наталитета и морталитета, расподелу са слике 5(a) пројектујемо 200 година у будућност моделом са константном средњом стопом морталитета $\mu 0,00908$ и њој одговарајућој равнотежној стопи наталитета $\nu_s 0,04363$. Добијена крајња расподела приказана је на слици 5(a'') са одговарајућом аналитички конструисаном равнотежном расподелом. Иако је успостављање равнотеже асимптотски процес који теоријски захтева бесконачно дуго време, занемарљива разлика између аналитички и нумерички одређених кривих са слике 5 (a'') показује да се после 200 година почетна расподела n_0 практично налази у стању равнотеже.



Слика 5. Динамика демографских ожиљака. (а) – (в) Почетне расподеле конструисане су тако да имају само један ожиљак ширине $\sigma 5$ на τ_{065} односно τ_{015} години. (а') – (в'). Приказ поремећаја почетног тренда добијен пројектовањем почетне популације 200 година у будућности са средњом стопом морталитета шездесетих година $\mu 0,00908$, равнотежном стопом наталитета и плодне дела популације $\nu_s 0,04363$ и средњом стопом наталитета плодне дела популације шездесетих година

$v_0,05322$. Вредности поремећаја – од најмање до највеће – приказане дојом која се креће од јарко плаве, преко валера зелене, до јарко жутије, иако да се обезбеди униформности перцепције на целом ојсеју. Пуна, искрекидана и црпикаста линија приказују иућање примарних, секундарних и терцијарних демографских ожиљака. (а'') – (в''). Плаве линије приказују прорачунасте слике иочетних расподела (а) – (в) након 200 година, искрекидане црпикасте линије приказују одговарајуће равнотежне расподеле.

Постојање експоненцијално-опадајућег тренда маскира постојање било којих других структура нарочито у областима где су вредности функције $n(\tau; t)$ велике. Стога Слика 5 (а') приказује еволуцију поремећаја тренда $\delta n(\tau; t)$, дефинисаног релацијом:

$$\delta n(\tau; t)n(\tau; t) - N_0 \exp[-\mu\tau], \quad (22)$$

Добијена функција $\delta n(\tau; t)$ поседује само један минимум чија је путања приказана пуном црном линијом. Овај минимум је очигледно слика демографског ожиљка расподеле $n(\tau; t)$. Униформна обојеност графика ван ожиљка сведочи да облик функције $\delta n(\tau; t)$, осим ожиљка, нема других изражених одлика. Овакав резултат је очекиван, јер популација старости $\tau > \tau_R$ не учествује у репродукцији и стога не може утицати на облик расподеле узраста $\tau < \tau_0 + t$.

Еволуција почетне расподеле (21) са сликом 5(б) даје функцију поремећаја $\delta n(\tau; t)$ приказану на слици 5(б'). Иако је крајња расподела, приказана на слици 5(б''), потпуно идентична оној са слике 5(а''), пут ка равнотежи је сада знатно другачији. Наиме, прелазак ожиљка преко репродуктивног интервала $\tau_r < \tau < \tau_R$ проузрокује мањи број новорођенчади у односу на равнотежни случај, чиме се ствара секундарни ожиљак мање дубине. Преласком секундарног ожиљка преко интервала $\tau_r < \tau < \tau_R$ настаје терцијарни ожиљак и описана динамика се наставља све док амплитуда ожиљака вишег реда не постане толико мала да се у расподели види као превојна тачка, а не као минимум. Стога је разумно анализу ограничити само на ожиљке који доминантно одређују облик расподеле. Голим оком се на расподели са слике 5(б') може пратити еволуција примарног секундарног и терцијарног ожиљка међусобно раздвојених, приближно, 25 и 35 година по τ оси.

Приказана анализа демографски уравнотеженог система даје процене најдужег трајања ожиљака и њихових секундарних ефеката. У реалистичнијем случају простирање ожиљака је поремећено додатним процесом промене равнотежног стања. Да бисмо проценили утицај ових ефеката на динамику ожиљака, размотримо еволуцију почетне расподеле са слике 5(в), [идентичне оној са слике 5(б)] са стопом наталитета плодног дела популације шездесетих година $v_{0,05322}$. После двеста година успоставља се асимптотска расподела³⁵ са константом опадања $\alpha = 0,01595$. *Голим оком* је у овом случају могуће пратити еволуцију само примарног и секундарног ожиљка који су међусобно размакнути као и у претходном случају. Овај резултат је очекиван, јер наравнотежна стопа наталитета природно повлачи већи број потомака, чиме се и смањује амплитуда ожиљка у односу на случај демографске равнотеже.

Закључак

Као што је већ речено, на први поглед се конструисање оваквог модела може чинити сувишним у околностима у којима већ располажемо подацима из статистичких годишњака. Ипак, провера тачности и конзистентности података којима располажемо такође представља важан корак у истраживању. Овом методом, као додатни и не сасвим ефемеран реверзibilни резултат, добијамо закључак да је *Стайистички годишњак* прилично поуздан историјски извор, бар када су у питању овде коришћени подаци. Јер, уколико су коришћени подаци тачни (и само тада), и налази путем ове методологије једино могу бити тачни (отуда је важна њихова провера). Но, пошто је историографија (консензусно) и до сада *Стайистички годишњак* узимала као поуздан извор података (без емпиријске провере), важност ове методе се, у ствари, налази на другом месту.

Уколико се, као што то јесте случај у овом моделу, покаже да се овим математичким моделом пројекција поклапа са реалношћу (статистичких података), онда се за историографску струку отварају разнолике

35 Асимптотска расподела не мења облик у t правцу већ само укупан број појединаца.

могућности њене примене. Другим речима, ако резултати пописа из 1961. године потврђују математичку пројекцију која је заснована на подацима из 1953. године (и тако редом), онда смо у прилици да, за потребе финијих истраживања, посебно када су у питању студије случаја, реконструиремо недостајуће податке, не само за године између 1953. и 1961, 1961 и 1971, или 1971. и 1981, већ у још три могућа правца. Један правац је свакако будућност, са могућношћу пројекције равнотежне расподеле становништва по утврђеним критеријумима, до данашњих дана, и још даље – у будуће време. У том смислу, пројекције нам омогућавају одговор на потенцијално фундаментална питања као што су „колико ће нас бити за сто година” или „за колико нас година више неће бити уколико овим темпом наставимо да умиремо и да се рађамо”. Опсег и број научних хипотеза које би даље из таквих питања и налаза могле произаћи су огромни. Други могући правац је повратак у даљу прошлост, што омогућује реконструкцију недостајућих демографских података за одређене периоде и просторе. Трећи је „зумирање” података у одређеном распону: могуће је детектовати демографске податке за, рецимо, јун месец 1958. године.

Шта бива када се ове могућности укрсте? Уколико је помоћу модела могуће кретати се „уназад” и „унапред” по временској оси, па ако је још могуће и „зумирање” података на месечном нивоу, онда би један потенцијални корак у наредном истраживању могао бити следећи: 1) на основу првог послератног пописа вратити се у време рата, рецимо у 1942. годину, 2) на основу последњег предратног пописа пројектовати резултате за 1942. годину, 3) укрштањем добијених података утврдити вероватан број становника за ту годину, чак за поједини месец на одређеном простору. Такве пројекције омогућују стабилно упориште не само за потенцијално нова истраживања ратних страдања, већ и за квалитативно нове процене питања као што је проценат учешћа становништва у рату, покретима отпора, резистенцији, страдању и сл.

Ниједна наука то није уколико у себи не носи бар неки степен предикције. Ова метода историографији може помоћи утолико што она предвиђа трендове, па самим тим и исходе, те тако може утицати на врсту питања коју историографија поставља историјским изворима. Ова методологија још омогућује раздвајање доприноса на: уочавање брзих промена (и када се оне тачно дешавају) и спорих промена. Другим речи-

ма, математика помаже да установимо оно што голим оком (а поготово у будућности) не можемо да опазимо: шта се на сто година мења брзо, а шта споро, шта припада метаморфози друштва, а шта катастрофи. У суштини, изградња овог математичког модела представља први корак ка истраживању наглих, брзих и радикалних промена у друштву (теорија катастрофа)³⁶. Модел доприноси могућности детектовања „катастрофа” помоћу математике и морфологије, чије би разлоге потом историчари требало да објашњавају.

Поменимо на крају начине на који се развијени модел може проширити. Емиграција се на једноставан начин може укључити модификацијом стопе морталитета. Имиграција захтева модификацију стопе наталитета и укључивање стопе имиграције којом се специфицира релативна промена укупне популације одређеног узраста. Нумерички модел омогућава да се замени и претпостављени малтузијански модел промене популације логистичким или било којим другим сложенијим нелинеарним моделом. Слично као и у епидемиологији, модел се може проширити тако да се независно прате популација мушкараца и жена или било која добро дефинисана демографска група.

Додаци

1. Алгоритам за решавање Меккендрикове једначине

Нека су $\mu_1, \mu_2 \dots$ и $\nu_1, \nu_2 \dots$ листе средње стопе морталитета/наталитета популације на нивоу од годину дана добијене за године $t_1, t_2 \dots$. Функције морталитета и наталитета $\mu(t)$ и $\nu(t)$ су на основу листа $\mu_1, \mu_2 \dots, \nu_1, \nu_2 \dots$ и $t_1, t_2 \dots$ конструисане методом кубних Хермитових интерполационих полинома, где су вредности функција $\mu(t)$ и $\nu(t)$ за $t_k \leq t < t_{k+1}$ кубне функције

$$\begin{aligned} \mu(t) &= a_k(t - t_k)^3 + b_k(t - t_k)^2 + c_k(t - t_k) + d_k, \\ \nu(t) &= \alpha_k(t - t_k)^3 + \beta_k(t - t_k)^2 + \gamma_k(t - t_k) + \delta_k \end{aligned}$$

са коефицијентима a_k, b_k, c_k, d_k , и $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$, одређеним тако да се наметне непрекидност и глаткост функција $\mu(t)$ и $\nu(t)$ да њихова моно-

36 René Thom, *Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1989)

тоност прети монотоности одабирака.³⁷ Иста процедура је коришћена за конструкцију континуалних расподела старости популације $n(\tau)$ добијених пописом, са том разликом што су расподеле додатно нормиране

$$n(\tau) \leftarrow \frac{\sum_k n_k}{\int_{\tau_m}^{\tau_M} n(\tau) d\tau} n(\tau), \quad (24)$$

укупним бројем популације датим интегралом (1) који је срачунат трапезоидним правилом

$$\int_{\tau_m}^{\tau_M} n(\tau; t) d\tau \approx \frac{\Delta\tau}{2} n(\tau_1, t) + \Delta\tau \sum_{k=2}^{N-1} n(\tau_k, t) + \frac{\Delta\tau}{2} n(\tau_N, t). \quad (25)$$

Главна погодност решавања парцијалних диференцијалних једначина методама Фуријеове анализе је постојање веома ефикасног метода за израчунавање интегралних трансформација облика датих једначинама (3) и (4) који је због своје брзине назван *брза Фуријеова трансформација* (Fast Fourier Transform).³⁸ Међутим, наивна примена FFT алгорита, са прозорском функцијом (2), доводи до појаве не-физичких осцилација функције $n(\tau, t)$ у близини тачке τ_0 , познатих као Гибсов ефекат,³⁹ и који је један од главних узрока нумеричке грешке.

Да бисмо заобишли ова ограничења, проширимо опсег прорачуна са $[\tau_m, \tau_M]$ на $[\tau_a, \tau_b]$ који тачкама τ_k изделимо у N подинтервала дужине $\Delta\tau(\tau_b - \tau_a)/N$, и заменимо правоугаону прозорску функцију (2) са тзв. Тукијевом функцијом⁴⁰

37 Под праћењем монотоности подразумева се да је на интервалима где вредности одабирака расту/опадају интерполациона функција такође растућа/опадајућа, тамо где одабирци досежу екстремне вредности, то чине и интерполационе функције. – Fritsch, Carlson, „Monotone Piecewise Cubic Interpolation”, 238–246; Kahaner et al, *Numerical Methods and Software*

38 James W. Cooley, John W. Tukey, „An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”, *Mathematics of Computation*, vol. 19 (1965), 297–301.

39 Papoulis, *The Fourier Integral and Its Application*

40 Fredric J. Harris, „On the use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier transform”, *Proceedings of the IEEE*, no. 1 (1978), 51–83.

$$W(\tau) \begin{cases} 0 & \tau < \tau_a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(\tau_m - \tau)}{\tau_m - \tau_a}\right) & \tau_a \leq \tau < \tau_m, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi(\tau - \tau_M)}{\tau_b - \tau_M}\right) & \tau_m \leq \tau < \tau_b, \\ 0 & \tau_b \leq \tau, \end{cases} \quad (26)$$

чије вредности постепено расту од 0 до 1, чиме значајно смањују појаву Гибсовог ефекта. Деловање трансляционог оператора (4) на дискретизовану расподелу представљену вектором $\mathbf{n}(t)(n_1(t), \dots, n_N(t))$, са $n_k(t)n(\tau_k, t)$ добијамо комбинацијом FFT и алгоритма FFT^{-1} на следећи начин

$$\mathbf{n} \leftarrow FFT^{-1}\{\exp[i\omega\Delta t] \circ FFT\{\mathbf{W} \circ \mathbf{n}\}\}, \quad (27)$$

где је, $\mathbf{W}(t)(W_1W(\tau_1), \dots, W_NW(\tau_N))$, \circ означава Хадармадов производ односно $\mathbf{W} \circ \mathbf{n}(W_1n_1, \dots, W_Nn_N)$, $\omega(-\pi/\Delta\tau, -\pi/\Delta\tau + 2\pi/(\tau_b - \tau_a), \dots, \pi/\Delta\tau)$, а $FFT^{-1}\{FFT\{\mathbf{n}\}\}\mathbf{n}$.

Као додатно обезбеђење против појаве Гибсовог ефекта, након сваке translације, добијени вектор $\mathbf{n}(t - \Delta t)$ је дигиталним филтером преносне функције

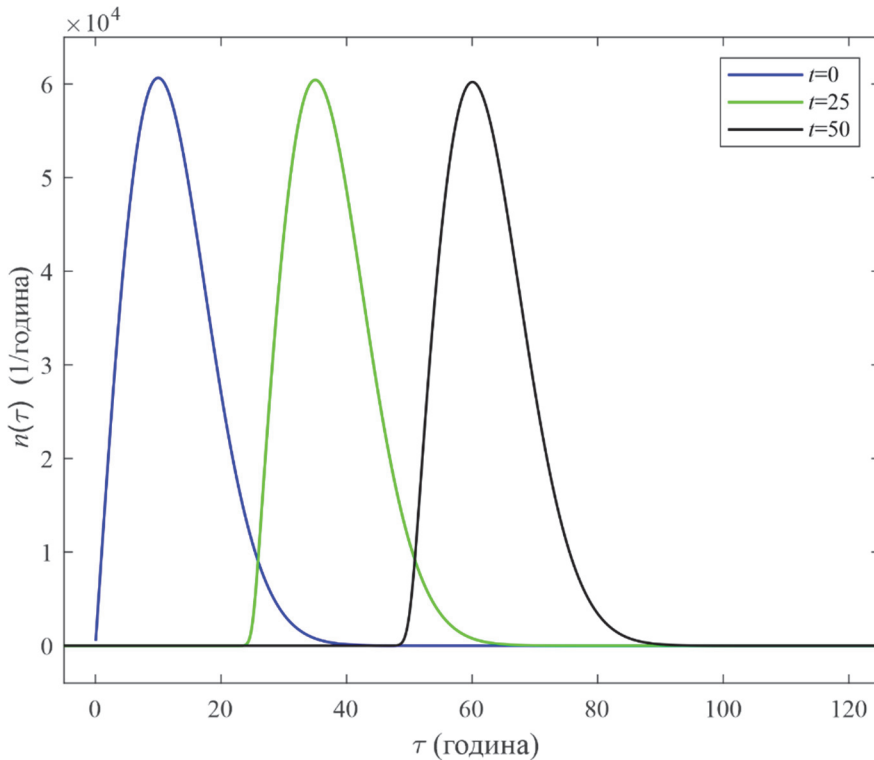
$$H(z) \frac{2}{1 + z}, \quad (28)$$

чије деловање је имплементирано Z трансформацијом⁴¹

$$\mathbf{n} \leftarrow Z^{-1}\{H(z) \cdot Z\{\mathbf{n}\}\}. \quad (29)$$

Након филтрирања постављено је $n_k 0$ за свако $\tau_k < 0$. Како филтрирање не очувава норму, филтрирани вектор је нормиран на број јединки популације пре translације. На овакав начин могуће је расподелу $\mathbf{n}(t)$ померити за произвољну вредност помераја Δt која није нужно мала (види слику 6). На овај начин је смањен број рачунских операција и држи се под контролом нумеричка грешка.

41 Eliahu I. Jury, *Theory and Application of the Z-Transform Method* (New York: John Wiley & Sons, 1964)



Слика 6. Сликарење популације имплементациране Транслационим оператором. Плава линија представља почетну расподелу узраста популације датe Релијевоm функцијом $n_0(\tau) \tau Y_0 / \sigma^2 \exp[-\frac{1}{2} \tau^2 / \sigma^2]$, где је $Y_0 = 10^6$, а $\sigma = 10$ година. Жута и црна линија представљају расподеле $n(\tau) - n_0(\tau - t)$ за $t=25$ односно $t=50$ година, добијене применом релација (26) – (29) са временским кораком $\Delta t = 0,1$ година, 250 односно 500 пута.

Приметимо да по конструкцији алгоритам транслације одржава укупну популацију $\int n_0(\tau) d\tau \int n(\tau) d\tau \approx Y_0$. Стога се грешка имплементације огледа у изобличењу облика „транслиране” расподеле. Како је почетна расподела са слике 6 дата не-нормираном Релијевоm функцијом

$$n_0(\tau) \frac{\tau Y_0}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right], \quad (30)$$

при чему је $Y_0 10^6$, а $\sigma 10$ година, њен максимум се налази на $\tau_0 \sigma$ и износи $n_{\max} Y_0 / \sqrt{e\sigma^2} 60\ 653.066$, и чија ширина се уобичајено процењује стандардном девијацијом дефинисаном интегралом

$$\Delta(n_0) \sqrt{\int_0^{\infty} \tau^2 n_0(\tau) \frac{d\tau}{Y_0} - \left(\int_0^{\infty} \tau n_0(\tau) \frac{d\tau}{Y_0} \right)^2} \sqrt{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)} \sigma 6.551. \quad (31)$$

Уколико би операција translације била савршено имплементирана да би зелена и црна линија са **слике 6** биле идентичне функцији $n_0(\tau - 25)$ односно $n_0(\tau - 50)$. Што захтева да им се максимуми налазе на $\tau_0 + 2535$, и $\tau_0 \sigma + 5060$, да су има висине једнаке n_{\max} а ширине $\Delta(n_0)$. Нумеричким диференцирањем и интеграцијом утврђено је да се максимуми жуте и црне линије налазе на 34.997 и 60.046, да су им висине 60 432.123 и 60 213.694, док су им одговарајуће ширине 6.579 и 6.607. Као што је и очекивано грешка translације пропорционална је величини корака алгоритма који у овом случају износи $\Delta t 0,1$, веома слабо зависи од броја примена оператора приближне translације.

После translације расподела узраста је умањена за фактор одређен стопом морталитета

$$\mathbf{n} \leftarrow \exp[-\mu(t - \Delta t)\Delta t] \mathbf{n}, \quad (32)$$

а број новорођенчади промењен у складу са интегралом

$$n(0, t - \Delta t) v(t - \Delta t) \int_{\tau_r}^{\tau_R} n(\tau', t) d\tau, \quad (33)$$

који је такође израчунат применом трапезоидног правила (25). Описани поступак се понавља потребан број пута све док се не досегне жељено време.

У конкретним прорачунима за конструкцију интерполационих полинома коришћен је ефикасан оптимизован алгоритам имплементиран

у МАТЛАВ⁴²-овој функцији INTERP1. Дискретна Фуријеова трансформација је добијена применом FFTW3 алгоритма⁴³ којем се због сложености приступа посредно путем МАТЛАВ-ове FFT функције. Дигитално филтрирање, којим се минимизује фазно кашњење, односно фазно изобличење сигнала,⁴⁴ постигнуто је коришћењем МАТЛАВ-ове FILTFILT функције.

2. Равнотежна расподела становништва

Равнотежна или стационарна популација $n(\tau; t)$ је она која се не мења у времену, односно за коју је

$$\frac{\partial}{\partial t} n_s(\tau; t) = 0, \quad (34)$$

што значи да је n_s функција само од τ . Заменом услова (34) у једначине (12) и (13) долазимо до једнакости

$$\frac{\partial}{\partial \tau} n_s(\tau) - \mu(\tau; t)n_s(\tau), \quad n_s(0) \int_{\tau_r}^{\tau_R} \nu(\tau'; t)n_s(\tau') d\tau', \quad (35)$$

која може бити задовољена само ако је

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mu(\tau; t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \nu(\tau; t) = 0, \quad (36)$$

односно, равнотежне расподеле морталитета μ_s и наталитета ν_s функције су само од τ . Интеграцијом једначине (35) добијамо

$$n_s(\tau) \mathcal{A} \exp \left[- \int_0^\tau \mu_s(\tau') d\tau' \right], \quad (37)$$

где је \mathcal{A} произвољна интеграциона константа. Заменом добијеног израза за n_s у гранични услов (13) долази се до опште везе између равнотежних расподела наталитета и морталитета

42 1994–2025 The MathWorks, Inc.

43 Matteo Frigo, Steven G. Johnson, „The Design and Implementation of FFTW3”, *Proceedings of the IEEE*, no. 2 (2005), 216–231.

44 Openheim et al, *Discrete-Time Signal Processing*.

$$1 \int_{\tau_r}^{\tau_R} \nu_s(\tau') \exp \left[- \int_0^{\tau'} \mu_s(\tau'') d\tau'' \right] d\tau', \quad (38)$$

тј. и равнотежна расподела наталитета функција је једино од τ . У најједноставнијем случају када су μ_s и ν_s константе, равнотежна расподела се поједностављује на

$$n_s(\tau) \mathcal{A} \exp[-\mu_s \tau], \quad (39)$$

а једначина (38) постаје

$$\frac{\mu_s}{\exp[-\mu_s \tau_r] - \exp[-\mu_s \tau_R]} \nu_s, \quad (40)$$

односно, свакој средњој стопи морталитета μ_s одговара тачно једна уравнотежујућа вредност средње стопе наталитета ν_s , које ћемо називати равнотежни пар.

У близини равнотеже када је $|v - \nu_s| \ll 1$ асимптотску форму расподеле такође претпостављамо у асимптотском облику.

$$n(\tau, t) \mathcal{A}(t) \exp[-\alpha(t)\tau]. \quad (41)$$

Заменом претпостављеног облика (41) у систем (35) добијамо једначину промене амплитуде

$$\partial_t \mathcal{A}(t) - \alpha(t) \mathcal{A}(t) - \mu(t) \mathcal{A}(t), \quad (42)$$

Док се гранични услов претвара у тзв. карактеристичну једначину

$$\frac{\alpha(t)}{\exp[-\alpha(t)\tau_r] - \exp[-\alpha(t)\tau_R]} \tilde{v}(t), \quad (43)$$

чија решења одређују асимптотско понашање расподеле која је дата релацијом

$$n(\tau; t) \mathcal{A}(0) \exp \left[-\alpha(t)\tau + \int_0^t (\alpha(t') - \mu(t')) dt' \right]. \quad (44)$$

Приметимо да је лева страна карактеристичне једначине монотона функција по α која се може приказати на следећи начин

$$\frac{1}{\Delta} e^{\alpha \bar{\tau}} \frac{\alpha \frac{\Delta}{2}}{\sinh \left(\alpha \frac{\Delta}{2} \right)} \tilde{\nu}, \quad (45)$$

при чему је $\Delta \tau_R - \tau_r$, а $\bar{\tau}(\tau_R + \tau_r)/2$, одакле следи да је $\alpha < 0$ за $\tilde{\nu} < 1/\Delta$, ($\tilde{\nu} \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow -\infty$), док је $\alpha > 0$ за $\tilde{\nu} > 1/\Delta$.

Како је $\mu > 0$, експоненцијално растућа расподела старости ну-жно опада у времену. За $\tilde{\nu} \rightarrow 0$, $|\alpha| \gg \mu$ па је стопа опадања популације у времену одређена функцијом $\alpha(t)$, а не $\mu(t)$! Испоставља се да стопа морталитета нема утицај на опадање броја особа у популацији. Међутим, у овом режиму параметара популацијом доминирају веома старе особе, што значи да стопа морталитета није довољна да значајно смањи број становника узраста $\tau_m \leq \tau < \tau_M$, главни извор смртности је досезање биолошки максимално могуће старости τ_M , а број становника овог узраста примарно је одређен функцијом $\alpha(t)$. Привидни парадокс потиче од чињенице да се анализа заснива на средњим стопама наталитета и морталитета $\mu(t)$ и $\tilde{\nu}(t)$, а не на узрасно осетљивим парњацима $\mu(\tau; t)$ и $\nu(\tau; t)$. Како за ове вредности параметара популација изумире, овај режим одговара демографском слому популације.

За $\tilde{\nu} > 1/\Delta$ и $\alpha > 0$, расподела по узрастима је експоненцијално опадајућа са константом опадања $\alpha(t)$. У зависности од вредности функције $\mu(t)$, бројност популације се увећава за $\alpha(t) > \mu(t)$, остаје непромењена ако је $\alpha(t) = \mu(t)$ или се смањује за $\alpha(t) < \mu(t)$.

Резиме

Тема овог рада је интердисциплинарни покушај изградње научног, математичког модела који може да прати динамику становништва између два пописа. Формирање овог модела произашло је из тежње да се оптимизује историографска методологија и испитају могућности примене математичких модела у друштвеним наукама. Математички модел који омогућава праћење промена у броју становника између два пописа изграђен је на основу података из *Статистичког завода у периоду Хладног рата, на примеру становништва Југославије*. Први део рада објашњава разлоге за изградњу оваквог научног модела, док други део прати процес његовог формирања и добијене резултате. Добијени модел потенцијално омогућава историографији да пројектује број становника за периоде и подручја за која статистички подаци не постоје, док, с друге стране, математици и физици доноси могућност развоја модела заснованих на подацима које ове науке раније нису користиле или примењивале.

Списак референци – Reference List

- Antolović, Mihael. „Nekoliko zapažanja o istoriografiji, kulturnom transferu i prevodenju”. U *Samislilac. O prevodiocima i prevodilaštvu*. ur. Gordana Đerić, 25–44. Beograd: IES, 2025. (Cyrillic) DOI: https://doi.org/10.18485/ies_ctes_samisl.2025.ch2
- Bakhtin, Mikhail M. „Forms of Time and the Chronotope in the Novel”. In *The Dialogic Imagination: Four Essays*. ed. Michael Holmquist, 84–258. Austin: University of Texas Press, 1981, 84–258.
- Baršt, Konstantin. *Crteži i kaligrafija F. M. Dostojevskog. Od slike do reči*. Beograd: Službeni glasnik, 2024. (Cyrillic)
- Baučić, Ivo. *The Effects of Emigration from Yugoslavia and the Problems of Returning Emigrant Workers*. The Hague: Martinus Nijhoff, 1972.
- Cooley, James W. and Tukey, John W. „An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”. *Mathematics of Computation*, vol. 19 (1965), 297–301.

- Courant, Richard and Hilbert, David. *Methods of Mathematical Physics: Volume II, Partial Differential Equations*. New York: Wiley and Sons: 1962.
- Ćirković, Sima. *O istoriografiji i metodologiji*. Beograd: Istorijski institut, 2007. (Cyrillic)
- Marko Ćosić i dr. „Morphological Study of the Rainbow Scattering of Protons by Graphene”. *Chaos. An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, no. 9 (2021), 093115-1–093115-19. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0059093>
- Ćosić, Marko i dr. „The Topological Origin of the Shape Stability Observed in Angular Distributions of the Axially Channeled Protons”. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 186 (2024), 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115235>
- Ćosić, Marko i Miljković, Nadica. „The Global Morphological Analysis of a Time-Delay Embedding of the Scalar Time Series”. *Nonlinear Dynamics*, vol. 112 (2024), 15133–15161. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-024-09750-1>
- Dabić, Vojin. „Mortalitet i starosna struktura srpskog stanovništva u Habsburškoj monarhiji u XVIII. Primeri pravoslavnih parohija Vukovar, Itebej, Deronje”. *Srpske studije*, br. 5 (2014), 13–45. (Cyrillic)
- Delić, Nino. „Srpsko pravoslavno stanovništvo Dalmacije i Vojne krajine (1828–1848) – broj, natalitet, mortalitet, nupcijalitet, prirodni i mehanički priraštaj”. *Srpske studije*, br. 5 (2014), 55–77. (Cyrillic)
- Despotović, Sanja Z. i Ćosić, Marko. „The Morphological Analysis of the Collagen Fiber Straightness in the Healthy Uninvolved Human Colon Mucosa Away From the Cancer”. *Frontier in Physics*, no. 10 (2022), 1–12. DOI: <https://doi.org/10.3389/fphy.2022.915644>
- Dong, Xiao et al. „Evidence for a Limit of a Human Lifespan”. *Nature*, vol. 538 (2016), 257–259. DOI: [10.1038/nature19793](https://doi.org/10.1038/nature19793)
- Dragišić, Olivera. *Komunističko osvajanje vlasti na Balkanu 1943–1947. Rumunija, Bugarska, Jugoslavija*. Beograd: INIS, 2023. (Cyrillic)
- Dragišić, Olivera. „Narodni front Jugoslavije: karakter, specifičnosti i funkcija”. *Istorija 20. veka*, br. 1 (2023), 99–116. DOI: <https://doi.org/10.29362/ist20veka.2023.1.dra.99-116>
- Dragišić, Olivera. „O ‘čistom’ i ‘opasnom’ na polju istoriografije. Nekoliko primera”. U *Nasleđe Andreja Mitrovića. Zbornik radova sa konferencije održane povodom deset godina od smrti profesora Mitrovića*, ur. Nemanja

- Radonjić, 401–415. Beograd: Filozofski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2024. (Cyrillic)
- Dragišić, Olivera. „Savezničko usaglašavanje oko potpisivanja primirja s Bugarskom 1944. godine”. *Tokovi istorije*, br. 2 (2023), 193–216. (Cyrillic)
DOI: <https://doi.org/10.31212/tokovi.2023.2.dra.193-216>
 - Dragišić, Petar. *Die verlorene Wissenschaft. Versuch einer Katharsis nach Corona*, herausgegeben von Klaus Buchenau und Matthias Fechner. Hannover–Stuttgart: Ibidem Verlag, 2024, *Tokovi istorije*, br. 2 (2024), 370–373. (Cyrillic)
 - Dragišić, Petar. *Zidari tuđe sreće. Beogradska štampa o ekonomskom emigriranju iz Jugoslavije u Zapadnu Evropu krajem šezdesetih i početkom sedamdesetih godina*. Beograd: INIS, 2019. (Cyrillic)
 - Đerić, Gordana. „Znati a ne znati kako znamo. Istorija neznanja i novi prilozi osvetljavanju društvene uloge prevodilaštva”. U *Samisililac. O prevodiocima i prevodilaštvu*, ur. Gordana Đerić, 7–25. Beograd: IES, 2024. (Cyrillic)
 - Evans, Dž. Ričard. *U odbranu istorije*. Beograd: Srpska književna zadruga, 2007. (Cyrillic)
 - Ekmečić, Milorad. *Dugo kretanje između klanja i oranja: istorija Srba u Novom veku (1492–1992)*. Beograd: Euro–Đunti, 2011. (Cyrillic)
 - Frigg, Roman. „Scientific Representation and the Semantic View of Theories”. *Theoria*, no. 2 (2006), 183–206.
 - Frigo, Matteo and Johnson, Steven G. „The Design and Implementation of FFTW3”. *Proceedings of the IEEE*, no. 2 (2005), 216–231.
DOI:10.1109/JPROC.2004.840301
 - Fritsch, Frederick N, and Carlson, Richard E. „Monotone Piecewise Cubic Interpolation”. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, no. 2, (1980), 238–246.
 - Harris, Fredric J. „On the use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier transform”. *Proceedings of the IEEE*, no. 1 (1978), 51–83.
 - Grujić, Radoslav. *Političko-verska aktivnost Vatikana na Balkanu kroz vekove*. Beograd: Catena mundi, 2020. (Cyrillic)
 - Jagodić, Miloš. „Procena broja Srba (1880–1910)”. *Srpske studije*, br. 1 (2010), 39–80. (Cyrillic)
 - Jagodić, Miloš. „Procena demografskih gubitaka Srba u periodu 1910–1921”. *Srpske studije*, br. 6 (2015), 11–65. (Cyrillic)

- Jovanović, Miroslav. „Teorija iznad teorije – koji je ponuđeni put? Četiri teze za jedno neobavezno razmišljanje”. *Godišnjak za društvenu istoriju*, br. 2 (1995), 286–289. (Cyrillic)
- Jovanović, Miroslav i Radić, Radivoj. *Kriza istorije: srpska istoriografija i društveni izazovi kraja 20. i početka 21. veka*. Beograd, 2009. (Cyrillic)
- Jovanović, Miroslav. *Srbi i Rusi, 12–21. vek: istorija odnosa*. Beograd: Narodna biblioteka Srbije, 2012. (Cyrillic)
- *Jugoslavija 1918–1988. Statistički godišnjak*. Beograd: Savezni zavod za statistiku, 1989. (Cyrillic)
- Herbert, Ulrich. *Geschichte der Ausländerpolitik in Deutschland. Saisonarbeiter, Zwangsarbeiter, Gastarbeiter, Flüchtlinge*. München: C. H. Beck, 2001.
- Jury, Eliahu I. *Theory and Application of the Z-Transform Method*. New York: Robert Krieger Publishing Co, 1964.
- Kahaner David, et al. *Numerical Methods and Software*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall 1988.
- Kvas, Kornelije. *Istina i poetika*. Akademska knjiga: Novi Sad, 2011. (Cyrillic)
- Kolingvud, Dž. Robin. *Ideja istorije*. Beograd: Službeni list SCG, 2003. (Cyrillic)
- Lotka, Alfred J. *Analytical theory of biological populations*. New York: Springer 1989.
- Martin, Joyce A, et al, „Births: Final Data for 2013”, *National Vital Statistics Reports*, no. 1 (2015), 1–68.
- Martinović, Žarko. „Primena psihoanalize u istoriografiji”. *Istorija 20. veka*, br. 1–2 (1984), 125–147.
- Milenković, Pavle D. „Fernan Brodel i dugo trajanje”, *Sociologija* br. 1 (2001), 59–80.
- Miljković, Nadica. *Metodi i instrumentacija za električna merenja*. Novi Sad: Akademska misao, 2020. (Cyrillic)
- Mitrović, Andrej. *Propitivanje Klio: ogledi o teorijskom u istoriografiji*. Beograd: Novinsko-izdavačka ustanova „Vojska”, 1996. (Cyrillic)
- Murray, James D. *Mathematical Biology. I. An Introduction*. New York: Springer-Verlag: 2001.
- Openheim, Alan V. et al. *Discrete-Time Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall 1999.

- Papoulis, Athanasios. *The Fourier Integral and Its Application*. New York: McGraw-Hill, 1962.
- Pavlović, Dušan. *Teorija igara. Osnovne igre i njihova primena*. Beograd: Fakultet političkih nauka, 2014.
- Popov, Čedomir. *O istoriji i istoričarima*. Sremski Karlovci, Novi Sad: Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, 1999. (Cyrillic)
- Popović, M. Miroslav. „O legitimitetu istorijske nauke i njenog saznanja u novijoj teoriji istorije”, *Antropologija*, br. 2 (2023), 29–51. (Cyrillic)
- Schaffer, Jonathan. „What Not to Multiply Without Necessity”. *Australian Journal of Philosophy*, no. 4 (2015), 644–664. DOI: 10.1080/00048402.2014.992447
- Sorensen, Danny C. „Newton’s Method with a Model Trust Region Modification”. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, no. 2 (1982), 409–426.
- Stojanović, Božo. *Teorija igara. Elementi i primena*. Beograd: Službeni glasnik, IES, 2005.
- Thom, René. *Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- Tojnbi, Arnold. *Proučavanje istorije*. Podgorica: CID, Beograd: Službeni list SRJ, 2002. (Cyrillic)
- Toš, Džon. *U traganju za istorijom: ciljevi, metodi i novi pravci u proučavanju savremene istorije*. Beograd: Clio, 2008. (Cyrillic)
- Vuletić, Aleksandra. „Koliko duša živi u jednoj kući? Broj članova domaćinstva u Srbiji (1834–1910)”. *Srpske studije*, br. 3 (2012), 219–144. (Cyrillic)
- Weon, Byung Mook and Je, Jung Ho. „Theoretical Estimation of Maximal Human Lifespan”. *Journal of Biosciences and Medicines. Biogerontology*, no. 10 (2009), 65–71. DOI: 10.1007/s10522-008-9156-4

SUMMARY

Olivera Dragišić
Marko Ćosić

A MATHEMATICAL MODEL OF POPULATION
CHANGE BETWEEN CENSUSES

ABSTRACT: The subject of this paper is an interdisciplinary attempt to construct a scientific mathematical model capable of tracking population dynamics between two population censuses. The development of this model emerged from an aspiration to optimize historiographical methodology and to examine the applicability of mathematical modelling within the social sciences. The mathematical model enabling the monitoring of population change between two censuses was developed on the basis of data drawn from the Statistical Yearbook of the Federal Statistical Office during the Cold War period, using the example of the Yugoslav population. The first part of the paper provides the rationale for the construction of such a scientific model, while the second part presents the process of its formulation and the results obtained. The resulting model potentially enables historiography to produce population projections for periods and regions for which statistical data are unavailable. At the same time, it offers mathematics and physics the opportunity to develop models based on data sets that these disciplines have not previously used for modelling purposes, nor applied in this manner.

KEYWORDS: methodology, model, historiography, Belgrade morphological school, demographic scars

The topic of this paper is an interdisciplinary attempt to build a scientific, mathematical model that can track population dynamics between two censuses. The formation of this model arose from the desire to optimize historiographic methodology and examine the possibilities of applying mathematical models in the social sciences. The mathematical model that allows monitoring the change in population between two censuses was built on data

from the Statistical Yearbook of the Statistical Office during the Cold War period, using the example of the Yugoslav population. The first part of the paper explains the reasons for building such a scientific model, while the second part of the paper traces the process of its formation and the results obtained. The resulting model potentially enables historiography to project population numbers for periods and areas for which statistical data do not exist, while, on the other hand, it brings to mathematics and physics the possibility of developing models based on data that these sciences have not previously built or applied.